# TEORÍA Y MANEJO

DE LA

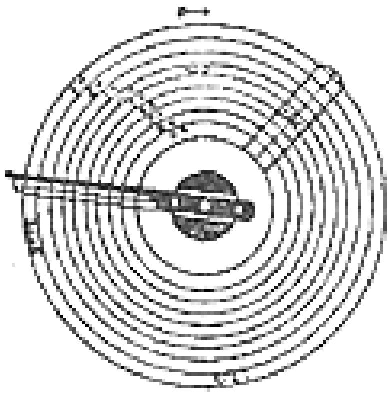
# REGLA DE CÁLCULO

POR

JOSÉ GARCÍA CIFRÉ

Coronel de Estado Mayor.

CUARTA EDICION



OBRA DECLARADA DE UTILIDAD

## INSTRUMENTOS CUYA DISPOSICIÓN Y USO SE DESCRIBEN

Regla de cálculo Manheim construída por A. W. Faber.
Regla de cálculo Moinot construída por Richer.—Círculo logarítmico Ruiz Amado.—Regla Nestler de grandes dimensiones.—Regla de las escuelas por Tavernier-Gravet.—Regla Beghin modelo especial.—Regla de dos reglillas Tavernier-Gravet.—Regla de precisión Nestler.—Regla Faber con escala de logaritmos de los logaritmos.—Reglas Peter y Perry.—Reglas Rietz y universal Nestler para los cubos.—Regla de bolsillo modelo de la Academia de Ingenieros del Ejército Español.
Regla automática Ollero.

MADRID

EDITORIAL JOSE G.ª PERONA, GALILEO, 72

1943

metría, para algunas de las cuales hay trazadas divisiones especiales en la reglilla y en la regla modificada, según hemos visto.

Para la Mecánica, la Química y otras ciencias aporta medios de resolver rápidamente sus cuestiones por procedimientos sumamente ingeniosos; y en todas aquellas artes, industrias y operaciones mercantiles en que se han de verificar frecuentes cálculos, es de notoria utilidad el empleo de este instrumento.

## XIII. Regla taquimétrica Richer.

114. La regla de Moinot, fabricada por Richer, constructor de un teodolito y de un taquímetro que, como la regla, llevan su nombre, tiene una longitud de cuarenta centímetros en su parte útil, que sumada a la sin graduar de ambos extremos, resulta de 423 milímetros, siendo su ancho de treinta y cuatro milímetros y su grueso de un centímetro; la reglilla tiene la mitad de espesor que la regla, o sea cinco milímetros; poco menos de la mitad de anchura, pues sólo es ésta de diez y seis milímetros, y la misma longitud, como es natural, pudiendo deslizarse en la caja abierta en la parte central de la regla en forma parecida a la estudiada en la de Faber, con la diferencia de que en la Richer los pequeños filetes salientes son de la regla y se introducen en el espesor de la reglilla.

115. En este instrumento la unidad elegida ha sido el doble decímetro dividido en 500 partes iguales, que cada una de ellas valdrá, en su consecuencia, dos milésimas de la unidad, siendo su longitud de cuatro diezmilímetros, pudiendo por tanto apreciarse los valores numéricos de los logaritmos con tres cifras decimales.

116. Como las distancias que se miden con el taquímetro están comprendidas generalmente entre 10 y 1.000 metros, se han numerado las escalas de la regla y de la reglilla, que llevan marcadas las mantisas de los logaritmos, colocando en el origen el número 10, en el punto medio el 100 y en el otro extremo el 1000.

Dentro de cada mitad de estas escalas hay tres subdivisiones motivadas por las razones expuestas en el párrafo 11. En la mitad de la izquierda, la primera de ellas llega hasta 20, y los números se diferencian en una décima, no marcándose con cifras más que los formados por un número exacto de unidades; en la segunda, que alcanza hasta 40, difieren los números en dos décimas y se han numerado los múltiplos de cinco; y en la tercera difieren en cinco décimas y se han escrito los que son decenas completas hasta 100. En la segunda mitad, o sea la de la derecha, las divisiones tienen la misma magnitud y van numeradas en la forma que, como resumen, figura en el siguiente cuadro, en el que se han marcado con caracteres más grandes los números que van grabados en las escalas.

| | | |
|---|---|---|
| Mitad de la izquierda. | Primera subdivisión. | **10** 10,1 10,2....**11** 11,1....**12, 13, 14....20** |
| | Segunda subdivisión. | 20,2 20,4 20,6 20,8..21..21,2....**25** 25,2... **30..35..40** |
| | Tercera subdivisión. | 40,5 41 41,5 42.....**50....60........100** |
| Mitad de la derecha. | Primera subdivisión. | 101 102 103.......**110** 111....**120...130.... 200** |
| | Segunda subdivisión. | 202 204.............**250.........300.........400** |
| | Tercera subdivisión. | 405 410 415 ........**500.....600......1000** |

117. De lo expuesto se deduce que en la primera subdivisión habrá, además del origen, 100 trazos, en la segunda otros 100 y en la tercera 120, resultando, por tanto, que se han tenido que grabar en cada borde 641 trazos y escribir 41 número, todo por las mismas razones que se expresan en la descripción de la regla Faber (26).

A fin de contar con más facilidad, no todos los trazos tienen el mismo tamaño, siendo de mayor longitud los que corresponden a divisiones medias entre las numeradas, y los correspondientes a los número enteros en la mitad izquierda y a las decenas en la derecha.

118. Con estos antecedentes, vamos a describir brevemente la forma y disposición del instrumento de que nos estamos ocupando, que, además de la aplicación que ofrece para la Taquimetría, da mayor aproximación que el anterior, por ser más grande la unidad elegida.

Los dos bordes de la regla tienen dos escalas logarítmicas exactamente iguales a la última descrita, ocurriendo lo propio con la graduación del borde inferior del anverso de la reglilla; estas escalas tienen grabada a su izquierda la abreviatura de la palabra *número*.

El borde superior del anverso de la reglilla presenta una escala logarítmica de senos, y en el reverso, su borde superior está destinado a los logaritmos de las tangentes, hallándose la parte inferior dividida en dos secciones, con un centímetro de separación entre ambas, y de longitud cada una de ellas igual a la unidad, por lo que, estando la reglilla colocada de modo que no sobresalga de la regla por ninguno de los dos costados, si bien la que contiene las escalas de la derecha destinadas a los senos cuadrados, coincide en sus dos extremos con los de la parte del mismo lado de la graduación de la regla, la escala de la izquierda, resulta naturalmente corrida un centímetro en este sentido. Esta sección (única del reverso aplicable a las cuestiones con los números), consiste en una escala de partes iguales encabezada con la inicial E, y en la que está la unidad dividida en la forma descrita, teniendo dos numeraciones que corren en sentidos contrarios y se complementan a 100, formándolas los números 0, 10, 20, 30.... 100. Para que se pueda contar más fácilmente, hay dos clases de trazos: los mayores corresponden a cinco centésimas de la unidad, los intermedios a las centésimas y los otros más cortos a las dobles milésimas.

119. El uso de la regla, tanto en lo que afecta a los problemas directo e inverso de logaritmos como al modo de efectuar las operacio-

nes aritméticas, es análogo al de la regla Faber, por razones fáciles de comprender, si bien, careciendo ahora de escala para los cuadrados, no pueden hallarse las potencias y raíces, más que utilizándola como regla logarítmica; teniendo presente que para hallar el logaritmo de un número, y, recíprocamente, hay que sacar la reglilla y volver a colocarla dentro de la caja, con el reverso delante, sin invertir, pues tampoco puede conseguirse el objeto en la forma que vimos anteriormente para la otra regla, que, por la disposición de la escala de partes iguales, evita este cambio.

## XIV. Círculo logarítmico Ruiz Amado

120. La regla de cálculo Richer, por haber elegido una unidad mayor que la que sirvió para construir la de Faber, permite resolver con mayor aproximación los problemas que hemos estudiado; y a medida que vaya aumentando la unidad cometeremos menor error en casos idénticos. Hemos dicho ya, sin embargo, que si bien en teoría puede esto concebirse, en la práctica resultaría irrealizable, pues dejarían de ser manejables instrumentos cuya más recomendable cualidad, estriba en ser de pequeñas dimensiones.

121. Esta dificultad se obvia con el empleo de los arcos de circunferencia en lugar de la línea recta, pues si tomamos por unidad la curva total, su longitud, que es mayor que seis veces el radio, nos permitirá tener en pequeño espacio, un instrumento que aprecie otras tantas veces más lo que nos aproximaríamos con una unidad igual a dicho radio, si la regla tuviera forma rectilínea.

122. Poco tiempo medió entre el descubrimiento de la regla de cálculo y la aplicación de la propiedad enunciada a los arcos de circunferencia, recibiendo estos nuevos instrumentos el nombre de círculos concéntricos y cuadrantes logarítmicos, entre los cuales vamos a describir el debido a D. H. Ruiz Amado (*), y que lleva el nombre de *doble transportador y círculo logarítmico*, ocupándonos únicamente (siguiendo la norma trazada) de la parte que se relaciona con las aplicaciones numéricas; prescindiendo de las taquimétricas, que son muy numerosas y le dan excepcional importancia.

---

(*) Describimos preferentemente este modelo, además de las razones de patriotismo que en casos iguales nos inducirían a darle preferencia sobre otro cualquiera, porque es mayor que en los demás la apreciación; la circunstancia de estar construido con cartón, materia más expuesta a deformaciones que cualquier metal, no es bastante para optar por los demás, ni aun por el modelo Porro, construído por la casa Salmoiraghi, pues su diámetro de 0m15 no permite que se use como instrumento de bolsillo; y como de gabinete, es muy pequeño para que se puedan aproximar los resultados, todo lo que se podía esperar de la sustitución de la recta por la circunferencia, de la cual es diámetro.

Siendo $B + C = 117^\circ\ 24'\ 21''$, resulta inmediatamente $A = 62^\circ\ 35'\ 39''$.

El valor de $b$ y el de $c$ se encuentran casi simultáneamente, puesto que la fracción multiplicando $\dfrac{a}{sen\ A}$ es común en ambos. Colocada la reglilla para operar con las escalas trigonométricas, se efectúa la coincidencia del número *19,8* del borde superior de la regla con el ángulo *62° 30'* de la escala de senos, y llevando la línea de fe sobre los ángulos de la misma *73°* y *43° 50'*, debajo de dicha raya, en la escala primera de números, se encontrará primeramente $b = 214^{m}$ y después $c = 155^{m}$.

Para determinar la superficie buscaremos *1,98* en el borde inferior de la regla, y colocando en aquel punto la línea de fe, debajo de ella, en el borde superior, estará su cuadrado, que no hay para qué detenerse en examinar cuál es su valor numérico; situaremos debajo de la misma línea de fe de la corredera, que ha permanecido inmóvil, el *2* de la graduación superior de la reglilla, y llevaremos sobre el origen de ésta, que marcará el cociente $\dfrac{a^2}{2}$ el índice del cristal; sin mover éste, sacaremos la reglilla y la volveremos, colocando debajo de aquél el extremo de la derecha de *S*, moveremos la corredera hasta que se coloque sobre el ángulo *73°* de dicha graduación, trasladaremos la reglilla de modo que se sitúe debajo de la raya del cristal el ángulo *62° 30'*, y deslizando la corredera hasta que su línea de fe esté sobre el valor gradual *43° 58'*, encima tendremos en área $E = 14800\ m^2$.

## XX. Regla Richer

204. Adoptada para el taquímetro del mismo constructor la graduación centesimal en sus limbos, la regla de cálculo cuya descripción en general fué hecha en el capítulo XIII, presenta las escalas trigonométricas con arreglo a la misma división. Contiene dos de estas escalas, aparte de la de senos cuadrados que se dedica exclusivamente a la Taquimetría.

205. La escala de los senos grabada en el borde superior del anverso de la reglilla, tiene una longitud de dos unidades, o sea la de toda la parte útil de la regla, y están en ellas señaladas las mantisas de los logaritmos de los senos de los ángulos desde $0^G\ 63'\ 70''$ hasta $100^G$, por ser aquel ángulo el primero que tiene de característica del logaritmo del seno $a - 2$; y como la del seno del cuadrante es *0*, se pueden situar los logaritmos en el referido espacio que tienen 2 unidades, diferencia de los dos límites. En el origen de la escala hay un número *8*, y en la mitad de ella un *9*, para recordar que los logaritmos de los se-

nos de los arcos que corresponden a la primera y segunda de estas dos partes, tienen esas características, después de haber sido aumentadas en 10 unidades para que el logaritmo sea todo positivo.

206. Por las razones conocidas, no son iguales todas las diferencias entre dos arcos consecutivos, estando dividida la escala en ocho agrupaciones: la primera, que se extiende desde el origen hasta *2*$^G$, tiene los trazos creciendo de minuto en minuto; la segunda, hasta *4*$^G$, de dos en dos; la tercera, hasta *10*$^G$, de cinco en cinco minutos; la cuarta, hasta *20*$^G$, de diez en diez; la quinta, hasta *40*$^G$, de veinte en veinte; la sexta, hasta *60*$^G$, de treinta en treinta; la séptima, hasta *90*$^G$, de grado en grado, y la octava, hasta *100*$^G$, de cinco en cinco.

No todos los trazos son de igual tamaño, para facilitar las lecturas: en la primera subdivisión los hay de tres, de los cuales los mayores corresponden a las decenas de minuto, y los intermedios a los múltiplos de 5 de orden impar; en la segunda, que sólo tiene trazos de dos dimensiones, los largos corresponden a las decenas de minuto; en la tercera hay tres clases de rayas, las largas para los grados y medios grados, y las intermedias para las decenas de minuto; en la cuarta las rayas largas son para los grados, y las intermedias para los medios grados; en la quinta sólo hay dos clases de trazos, y los mayores son para los grados; en la sexta hay tres clases, los largos para los múltiplos de cinco grados, y los intermedios para los grados; en la séptima también tres, los de mayor longitud para los múltiplos de diez grados, y los pequeños para los de cinco, de orden de multiplicidad impar; y en la octava no hay más que una línea para marcar los *95*$^G$.

Todos los números que se refieren al valor gradual son del mismo tamaño; en la primera agrupación, van numeradas las decenas de minuto en minuto hasta llegar a un grado, y el medio grado entre *1*$^G$ y *2*$^G$; en la segunda los grados y medios grados; en la tercera y cuarta los grados; en la quinta los múltiplos de cinco grados; en la sexta, séptima y octava, los múltiplos de diez grados.

Además, como el seno de un ángulo es igual al de su complemento, cada número tiene debajo su diferencia a 200, si son grados, o a 100, si son minutos.

207. Resumiendo en un cuadro lo que llevamos dicho, apuntamos a continuación la división de las ocho agrupaciones, en que los guarismos más grandes nos indican trazos que están numerados.

| | | |
|---|---|---|
| **Escala de senos** | Primer grupo. . | 0,637 0,64 0,65..**0,70** 0,71 0,72... **0,80**....**1** 1,01.....**1,50** ......**2** |
| | Segundo grupo. | 2,02 2,04..**2,50** 2,52...**3**....**3,50**....**4** |
| | Tercer grupo. . | 4,05 4,10 4,15..**5** 5,05...**6**....**7**....**10** |
| | Cuarto grupo... | 10,10 10,20..**11** 11,10...**12**....**13**.....**14**......**20** |
| | Quinto grupo... | 20,20 20,40.21 21,20..22...**25**....**30**....**35**....**40** |
| | Sexto grupo. . . | 40,50 41 41,50 42...**50** 50,50....**60** |
| | Séptimo grupo. | 61 62 63..**70** 71...**80**....**90** |
| | Octavo grupo... | 95 **100** |

208. La escala de tangentes, grabada en el borde superior del reverso de la reglilla, tiene por límite inferior, como antes, el arco de *$0^G$,637*, y por superior el de *$50^G$*, al que corresponde una línea igual a la unidad, siendo aquélla la primera tangente que llega a tener centésimas de la unidad, correspondiéndole a su logaritmo 8 de característica, después de aumentarle a ésta 10 unidades para evitar que sea negativa. Vemos, por lo tanto, que también dicha escala ha de tener dos unidades, y que existe la misma razón para que en su origen de la izquierda y en la mitad lleve los números *8* y *9*.

209. Se compone la escala de tangentes de cinco agrupaciones, de las cuales las cuatro primeras están divididas lo mismo que las cuatro del mismo orden de la escala de senos, y se extiende entre los mismos límites; la quinta, y última, que va desde *$20^G$* hasta *$50^G$*, tiene los trazos de veinte en veinte minutos.

También los diferentes tamaños de trazos de las cuatro agrupaciones son los mismos, y corresponden a los mismos arcos que en los senos, y los números que hay grabados son idénticos. En la quinta agrupación no hay más que dos longitudes de trazos, siendo la más larga para los grados, y van numerados los múltiplos de cinco grados.

210. El cuadro resumen es idéntico a las cinco primeras líneas del anterior.

211. Como la tangente de un arco menor que un cuadrante es igual y del mismo sentido que la contangente del complemento, además de los números que van grabados tiene cada uno debajo su diferencia a 100, bien sean grados o minutos, disponiéndose así de una escala de contangentes desde *$50^G$* hasta *$99^G363$*.

212 Vemos, por la descripción de este modelo de regla, que no hay diferencias esenciales entre su extructura y la de aquélla que con tanto detenimiento hemos estudiado. El modo de operar, bien con la escala de senos o con la de tangentes, será el mismo que expusimos entonces, sin más salvedad que, en virtud de tener ésta una longitud de dos unidades, se procederá con ella como para la de los senos se hacía con la de Faber.

## XXI. Circulo de cálculo Ruiz Amado

213. Por las mismas razones que se manifiestan en el párrafo 204, se ha adoptado para las divisiones de las escalas trigonométricas la graduación centesimal, por más que también este instrumento puede emplearse para el cálculo cuando las magnitudes angulares se han evaluado sexagesimalmente, sin necesidad de hacer la reducción por medio de las proporciones, debido a que la *subcorona* 2.ª lleva un transportador centesimal, y la 3.ª uno sexagesimal, divididos ambos en me-

# PARTE TERCERA

## Regla de cálculo taquimétrica

### XXII. Disposición de la regla Richer

223. Según hemos visto en la Primera y Segunda parte, la regla de cálculo Richer no difiere en su esencia de las demás, pues se funda en los mismos principios que todas ellas, y aun el inconveniente de que los dos bordes de la regla están graduados en la misma forma la priva de poder obtener las potencias y raíces directamente, y con la facilidad que en otros sistemas en que se han adoptado dos unidades diferentes, una doble de otra, para ambas escalas. Resulta, sin embargo, la regla Richer de gran aplicación a los cálculos de la Taquimetría, según vamos a ver (*), y todo en ella se halla dispuesto (116) para que sirva de poderoso auxiliar al aparato fabricado por la misma casa constructora, razones en que se funda que se la distinga de los otros sistemas con el nombre de *regla taquimétrica*.

224. Descritas en el capítulo XIII las escalas de números de la regla y reglilla y la de partes iguales de esta última, ampliados estos conocimientos en el título XX con el estudio de las escalas de senos y

(*) La casa de Albert Nestler de Lahr (Baden) ha construído una regla de grandes dimensiones, que aunque no la hemos tomado como modelo en vez de la de Richer por no tener escala de senos cuadrados, ofrece la ventaja de haber utilizado toda la longitud tomando el medio metro como unidad en una de sus escalas, lo que permite emplearla como la Manheim construída por Faber, pero duplicándose la aproximación por tal motivo. Breves palabras nos bastarán para describirla, no necesitándose ninguna para explicar su uso, puesto que es el mismo de la de Faber.

La escala primera de números tiene por unidad $0^{m},25$: desde 1 a 2 hay trazos de centésima en centésima, de 2 a 4 de dos en dos centésimas, y de 4 a 10 de cinco en cinco; la segunda mitad es idéntica a la primera, no sólo por tener la misma separación los trazos, sino por su numeración, que no se la ha multiplicado por 10.

En la segunda escala de números es la unidad de $0^{m},50$, y van las divisiones desde 1 a 2 de cinco en cinco milésimas, de 2 a 5 de centésima en centésima, y de 5 a 10 de dos en dos centésimas.

La escala de partes iguales aprecia milésimas, o mejor dicho la distancia entre tangentes de la reglilla, falta para completarlas conocer la disposición de las escalas de los senos cuadrados, que es la parte que va a constituir el objeto del presente capítulo.

225. Sabido es que la distancia horizontal que separa de la mira al eje vertical del taquímetro viene dada por la fórmula $D = q \operatorname{sen}^2 \varphi$, siendo $g$ el número generador que se reduce de la lectura de mira, y $\varphi$ el ángulo zenital, o sea el formado por el eje óptico del anteojo con la vertical del punto de estación, angulo que varía entre los límites $40^G$ y $160^G$.

Como el valor $g$ es un número que se ha de encontrar en la escala de estos de uno de los bordes de la regla, para efectuar este producto podría construirse una escala de los cuadrados de los senos que se hallan en el borde superior del anverso de la reglilla, y sumando las dos magnitudes, al final de la suma, en la escala de los números, estará aquel que representa el producto; pero esto tiene el inconveniente de que siendo la cuantía del logaritmo del cuadrado doble de la del perteneciente al número, tendríamos que dar aún mayores dimensiones a

---

dos trazos consecutivos, es la milésima parte de la unidad teniendo medio milímetro de longitud. El borde inferior lleva en toda su banda una división métrica en milímetros, que llega hasta $0^m,52$, prolongándose la división en el fondo de la ranura central de la regla.

La parte destinada a trigonometría tiene dos escalas en el reverso de la reglilla, una para senos y otra para tangentes, estando provista la regla de dos escotaduras, una a la derecha y otra a la izquierda, con objeto de hacer las lecturas sin poner delante la cara posterior de la reglilla; en ambas escalas se ha tomado como unidad, análogamente a lo que pasa en la regla Richer, la menor de las dos, o sea la de $0^m,25$.

En la escala de los senos van los trazos de cinco en cinco minutos hasta 10°, desde 10° hasta 20° de diez en diez minutos, desde 20° a 30° de quince en quince, de 30° a 50° de treinta en treinta, de 50° a 70° de grado en grado, de 70° a 80° de dos en dos grados, y de 80° a 90° de diez.

Para la escala de los tangentes (en la que habrá para los logaritmos, como en la anterior, características iguales a una y a dos unidades negativas), desde el origen hasta 10° existen trazos para los múltiples de cinco minutos, de 10° a 20° para los diez, y de 20° a 45° para los de quince minutos.

También la llamada *Regla universal Nestler*, de la que sucintamente nos ocupamos en la página 49, o la que corresponde a la presente edición, podría haberse tomado como modelo para describir las escalas taquimétricas muy semejantes a las adoptadas en la *Regla de cálculo de bolsillo*, modelo de la Academia de Ingenieros del Ejército español; pero como en ésta figura también la escala de logaritmos, que aun no hemos estudiado, tenemos que aplazar para el capítulo XXVIII el ocuparnos de su examen, y cuando entonces se dirá de las escalas trigonométricas y taquimétricas es aplicable a la *Regla universal Nestler*, ejemplar muy recomendable por haberse reunido en él anamorfosis que justifican un dictado que basta para hacerse cargo de la multiplicidad en las aplicaciones del instrumento; sin embargo, como veremos después, algunas fórmulas de la Taquimetría cuyo estudio vamos a empezar, tienen que transformarse antes de ser empleados en estos instrumentos, mientras que en la *Richer* se aplican inmediatamente, y, como lo propio acontece con el *Círculo Ruiz Amado*, ello nos ha inducido a tomar como modelos instrumentos que siguen un procedimiento uniforme a la par de ser el más elemental.

la regla. Todo ello se evita introduciendo un artificio de cálculo al hallar el logaritmo de $D$.

226. Si tomamos logaritmos en los dos miembros de la igualdad tendremos $\log D = \log g + 2 \log \operatorname{sen} \varphi$ : pero este segundo miembro es lo mismo que $\log g - 0 + 2 \log \operatorname{sen} \varphi = \log g - 2 (0 - - \log \operatorname{sen} \varphi)$ ; como el ángulo $\varphi$ varía entre 40° y 160°, a los senos de los arcos comprendidos entre estos límites les falta poco para valer la unidad; a sus logaritmos les restará muy poco para valer cero, lo cual podremos comprobar examinando en la regla lo que media desde el extremo de ese logaritmo seno hasta el extremo de la derecha de la reglilla; el doble de esta longitud será también muy pequeño (menor que media unidad, según puede comprobarse con el examen de la reglilla), y como esta cantidad es negativa, la hemos de tomar desde el punto extremo de la derecha de la reglilla hacia la izquierda, teniendo así resuelta la cuestión, pues colocado el extremo de la derecha de la reglilla de modo que coincida con el número $g$ buscado en la escala inferior de los números, en el trazo que hay en ésta en contacto con el arco $\varphi$ buscado en la escala de los senos cuadrados tendremos $D$, ya que el logaritmo de este número es la diferencia que existe entre el minuendo y el sustraendo del último miembro de la igualdad anterior.

227. Por las mismas razones aducidas siempre que se han descrito las escalas de las reglas, no es uniforme la graduación de la de los senos cuadrados. Entre $40^G$ y $60^G$ varía de veinte en veinte minutos; de $60^G$ a $80^G$, de medio en medio grado; de $80^G$ a $90^G$, de grado en grado, y de $90^G$ a $100^G$, de dos en dos grados.

También existe diferencia en la longitud de los trazos, con objeto, como siempre, de facilitar las lecturas; en la primera parte hay de dos tamaños, y los más largos corresponden a los grados; en la segunda agrupación hay de tres clases: los más largos, para los múltiplos de cinco grados, y los intermedios, para los grados; en la tercera hay dos tamaños, correspondiendo los trazos de mayor longitud a los ángulos $85^G$ y $90^G$, y en la cuarta no hay más trazo largo que el correspondiente al origen, o sea a $100^G$, cuyo seno es la unidad, y su logaritmo, 0.

Van numerados en la primera parte los múltiplos de $5^G$, y en las demás sólo los de $10^G$, y como el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, figuran colocadas debajo de cada uno de los números sus diferencias a $200^G$.

228. Como hay espacio disponible y además se puede obtener la resta indicada de otro modo que facilita el hallar simultáneamente una de las coordenadas de un punto, existe otra escala de senos cuadrados simétrica con la anterior, o sea con el origen correspondiente al $\operatorname{sen}^2$ de $100^G$, coincidiendo con la mitad de la regla debajo del 9 de las

características, extendiéndose la graduación de esta escala de izquierda a derecha.

229. Resumiendo en un cuadro lo dicho anteriormente, he aquí la disposición de una escala de sen²:

| | | |
|---|---|---|
| Escala de sen² | Primer grupo.. | **40** 40,20 40,40 40,60.**41** 41,2 |
| | | 0..42...**45** 45,20..46....**50**.....**55**.....**60** |
| | Segundo grupo. | 60,50 61 61,50 62...65 65,50 66....**70**.....75.....**80** |
| | Tercer grupo.. | 81 82...85.....**90** |
| | Cuarto grupo... | 92 94...**100** |

## XXIII. Cálculo de los elementos que fijan un punto

230. Determinada la posición de un punto por sus tres coordenadas rectangulares, y dependiendo los valores de éstas del de la distancia horizontal que media entre la línea vertical que pasa por dicho punto y el centro del sistema rectangular adoptado, comenzaremos por fijar el valor de dicha distancia horizontal, siguiendo a este cálculo el de la ordenada en el espacio, que está íntimamente ligada a ella por depender también del ángulo zenital, y pasando luego a examinar los procedimientos para hallar la abscisa y ordenada en el plano que dependen, además de la referida distancia, del ángulo azimutal.

231. En el cálculo del valor de $D = g \operatorname{sen}^2 \varphi$ seguiremos el método que se desprende de lo explicado en el capítulo anterior; para ello buscaremos el valor de $g$ en el borde inferior de la regla, haremos coincidir con el punto que lo determina el extremo de la derecha del reverso de la reglilla, y coincidiendo con el valor de $\varphi$ que figura en la escala de la derecha de los senos cuadrados tendremos en dicha escala de los números el valor de $D$, siendo necesario repetir las causas que justifican este modo de proceder, ya que la construcción de la escala de los cuadrados de los senos se fundó en la fórmula que resulta de tomar logaritmos en la que da el valor de $D$, y al hacerlo se demostraba que con este método se obtenía el resultado.

232. Otro procedimiento consistirá en hacer coincidir el trazo correspondiente al valor de $\varphi$ buscado en la escala de senos cuadrados de la izquierda, con el número $g$, buscado como antes en la escala de la parte inferior de la regla, y coincidiendo con el origen de la primera de las escalas tendremos en la segunda el valor de $D$. En efecto, puesto que las dos escalas corren en el mismo sentido y están referidas a una misma unidad, no hemos hecho al aplicar este método más que restar dos líneas rectas, siguiendo el procedimiento que se empleaba en el método elemental (58) para dividir un número por otro.

233. Para calcular el valor de la ordenada en el espacio, o sea la altura del punto respecto al origen de coordenadas, nos valdremos de la

fórmula $z = D \cot \varphi$, empleando la escala del borde superior del reverso de la reglilla, en la que los números de la fila inferior correspondientes a los ángulos comprendidos entre $50^G$ y $99^G\ 36'\ 30''$, nos sirven para determinar los extremos de la derecha de los logaritmos de las cotangentes que corresponden a los referidos ángulos (211). Si el ángulo $\varphi$ fuera menor que $50^G$, que rara vez se presentará una pendiente tan considerable, sabemos que lo mismo da multiplicar por una cotangente que dividir por la tangente del mismo arco, y como ésta la conocemos, fácilmente será el problema resuelto.

Para los ángulos mayores que $99^G\ 36'\ 30''$ y menores que $100^G$, las cotangentes de los mismos no están marcadas en la reglilla; pero como las tangentes de los complementos, por ser éstos tan pequeños, son proporcionales a los arcos correspondientes, bastará tomar un arco 10, 100... veces mayor que dicho complemento y operar con su tangente como factor, teniendo presente que el producto hay que dividirlo por 10, 100... Finalmente, si los arcos fueran mayores que $100^G$, le restaríamos un cuadrante (o sea quitaríamos la centena que tenía el ángulo, quedándonos con la decena y unidades) y operaríamos con la tangente o cotangente de un ángulo contenido en la graduación, puesto que al efectuar esta resta sólo han de variar el nombre y el signo de la línea trigonométrica referida, siendo el producto negativo y acusándonos, como efectivamente sucede, que el punto está más bajo que el origen.

Queda, por lo que llevamos dicho, reducida la cuestión, en la mayor parte de los casos, a multiplicar un número por la cotangente de un ángulo de los contenidos en la numeración inferior de la escala de tangentes, debiendo buscar el multiplicando en la escala de los números del borde superior de la regla y seguir luego cualquiera de los métodos indicados en la multiplicación en general, valiéndonos para efectuar la coincidencia con aquél del origen, del punto medio de la escala de tangentes o del extremo de la derecha.

234. Se anticipó en el capítulo anterior (228) que con la escala de la izquierda de los senos cuadrados se podía encontrar simultáneamente el valor de $D$ y el de $z$. En efecto; buscaremos para ello en la escala inferior de la regla el valor de $g$, haremos coincidir con este punto el valor gradual de $\varphi$, buscado en dicha escala de los cuadrados de los senos, y coincidiendo con el origen tendremos el valor de $D$ en la citada escala inferior; pero como ésta y la superior son idénticas y se corresponden, y el origen de la escala de la izquierda de los senos cuadrados está en la misma normal a los bordes que la característica 9 de las tangentes, dicha característica marcará en la escala superior de los números el valor de $D$, y en la misma escala numérica estará el valor de $z$, en coincidencia con el ángulo $\varphi$ buscado en la escala de las cotangentes.

235. La abscisa y la ordenada en el plano vienen dadas, respectivamente, por las fórmulas $x = D \operatorname{sen} \theta$ e $y = D \cos \theta$, en que $\theta$ representa el valor del ángulo leído en el limbo azimutal del taquímetro. Como no disponemos de una escala de cosenos, ni la de senos llega más que hasta 200 grados, tendremos que preparar los ángulos para poder hacer las lecturas en el borde superior del anverso de la reglilla.

Si se trata del valor de $x$ y el ángulo $\theta$ es menor que $0^G\ 63'\ 70''$, para estos ángulos tan pequeños los senos son proporcionales a los arcos; así es que multiplicando éste por 10 o por 100, etc., tendremos un ángulo contenido en la graduación, y estaremos en uno de los casos siguientes, bastando dividir luego el valor hallado por el número que sirvió de multiplicador, operación muy fácil de hacer tratándose de la graduación centesimal. Los ángulos menores que $100^G$ se buscan en la fila superior de los números de éstos, y los que están entre $100^G$ y $200^G$, en la fila inferior. Si el ángulo fuese mayor que $200^G$ se le restaría este número, y como los senos de dos arcos cuyas extremidades se hallan en las de un mismo diámetro son iguales y de signos contrarios, el seno será negativo, pero del mismo valor absoluto que el que resulta después de la sustracción.

Al tratar de determinar $y$, como ésta viene en función de un coseno, habrá que encontrar el complemento de $\theta$ si es que este ángulo es menor que $100^G$, puesto que el seno de un ángulo es el coseno del complementario (sustracción que se hace con facilidad por tratarse de graduación centesimal, en que se puede poner un complejo en forma incompleja decimal inmediatamente por seguir las diversas unidades la gradación del sistema de numeración); si fuera mayor que $100^G$ y menor que $200^G$, se restaría $100^G$ del valor de $\theta$, y el coseno será igual y de signo contrario al seno de éste; finalmente, si fuera mayor que $200^G$ se le restaría esta cantidad, y el coseno sería siempre de signo contrario al del ángulo que nos resulte, dependiendo de que este resto sea mayor que $100^G$ el que tenga aquella línea signo negativo o positivo.

236. Determinado el valor del ángulo, cuyo seno es en valor absoluto igual al coseno de $\theta$, y teniendo en cuenta el signo de que ha de estar afectado, con un solo movimiento de reglilla podemos determinar en la mayor parte de los casos los valores de $x$ y de $y$; para ello haremos coincidir con el valor de $D$, buscado en la escala superior de los números, el origen de la escala de los senos, y en coincidencia con cada uno de los dos ángulos determinados por el procedimiento que se acaba de indicar tendremos los valores de $x$ e $y$ en dicha escala de números.

Unicamente si alguno de los valores de los ángulos cayese fuera de la parte graduada de la regla tendremos que variar el origen, haciendo la coincidencia del valor de $D$ con el punto medio de la reglilla o con el extremo de la derecha de ésta, siendo entonces necesarios dos movimientos de la misma.

# REGLA TAQUIMÉTRICA RICHER